2η ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ
ΚΥΡΙΑΚΗ 5 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 7

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$.

Μονάδες 2

γ) Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$.

Μονάδες 2

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge 0$ τότε $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Η εξίσωση $z^2-2z+\alpha=0$ με $z\in\mathbb{C}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ έχει ρίζα έναν μη πραγματικό αριθμό ο οποίος έχει μέτρο $\sqrt{2}$.

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και να λύσετε την εξίσωση.

Μονάδες 6

Β2. Έστω z_1,z_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\operatorname{Im}(z_1)<0$ και w μιγαδικός για τον οποίο ισχύει $\left|2iw-2z_2-z_1^2\right|=2$. Να βρείτε:

i) τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w.

Μονάδες 7

ii) την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=(iw-1)^{2014}+\left(\dfrac{1}{\overline{w}-i}\right)^{2014}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\dfrac{\alpha}{x}-\alpha$, $x>0$ για την οποία ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x>0$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

Μονάδες 4

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 4

Γ4. Να λυθεί η ανίσωση: $\ln\dfrac{4x^2+2015}{x^2+2018} > \dfrac{1}{x^2+2018} - \dfrac{1}{4x^2+2015}$

Μονάδες 5

Γ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_0^x\left(\int_1^{1+t^2}\dfrac{e^u}{u}du\right)dt$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να την μελετήσετε ως προς την μονοτονίακαι την κυρτότητα.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} f(t)dt$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι για $\alpha>0$ ισχύει $f(x)-f(\alpha)\geq f'(\alpha)(x-\alpha)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_{f(x)}^{2015}\left(\int_1^{1+t^2}\dfrac{e^u}{u}du\right)dt=0$ έχει μοναδική ρίζα στους πραγματικούς.

Μονάδες 7

ΝΕΑ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ : Ν.Γρηγορά & Φιλίππου γωνία ● 69100 Κομοτηνή
● Τηλ. 2531024049 ● Fax 2531021416

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρηση σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιο σας</u>** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ